B(H)上のHermite元について(作用素の不等式とその周辺)

加藤, 佳宣

数理解析研究所講究録
500巻 1983年 11-35

B(H)上のHermite元について

布施高校(講師) 加藤佳宣 (Yoshinobu Kato)

本稿は講究録No.377中「C^*-環上のHermite元について」の続報である。以下それを[I]として引用するが一応、[I]の内容のあらましを一通り述べて置きたい。

研究の経緯 Banach環$\mathcal{B}(\ni 1)$の元Tの数域V(T)とは

$$V(T) = \{f(T) ; f \text{は} \mathcal{B} \text{の汎函数かつ} \|f\| = f(1) = 1\}$$

で定められた複素数体$\mathbb{C}$内の部分集合のことである。特に$\mathcal{B}$がHilbert空間$\mathcal{H}$上の(有界線形)作用素全体$\mathcal{B}(\mathcal{H})$のときにはV(T)は$W(T) = \{(Tx, x) ; \|x\| = 1\}$の閉包となっている。この関係を利用して一般の$\mathcal{B}$の元に対してHermite ($\mathcal{B}(\mathcal{H})$に於いてはself-adjointにあたるもの)の概念を

T : Hermite $\Longleftrightarrow$ V(T)は実数体$\mathbb{R}$の部分集合

として導入できる。同様に、

T : positive $\Longleftrightarrow$ V(T)は非負実数全体の部分集合

$$T : \text{normal} \iff T = A + iB, \quad AB = BA$$
$$A, B : \text{Hermite}$$

$$T : \text{projection} \iff T^2 = T : \text{Hermite}$$

も定義できる。これらの($\mathcal{B}$内での)集合をそれぞれ $\mathcal{B}^H$, $\mathcal{B}^+$, $\mathcal{B}^N$, $\mathcal{B}^P$ と記すことにする。更に、もう一つ

$$T : \text{rectangulable} \iff T = A + iB$$
$$A, B : \text{Hermite}$$

と定め、その集合を$\mathcal{B}^J$と書く。ここで"rectangulable"は長々しいので一応仮に「可矩的」と訳すことにし、$\mathcal{B}^J$の元は「可矩元」と称することにする。一般の$\mathcal{B}$では$\mathcal{B}^J = \mathcal{B}$は必ずしも成立しない。実際、$\mathcal{B}^J = \mathcal{B}$の必十条件は$\mathcal{B}$が$C^*$環であること、というのが有名なVidav-Palmerの定理の実質的な内容である。この一例からも判るようにBanach環のHermite元に関連した構造は十分に深い意味を持っている。しかしながら、C^*環以外での$\mathcal{B}^H$の具体的な研究は一般に難しい。それは基本的なHermite元の問題(例えばMurphy予想(後述)等のような)が解決していないせいも有るが、結局は研究上扱い易いHermite元を持ったBanach環の十分自然な実例が余り多くは知られていないことが原因と思われる。

そて、A.M.Sinclairは$\mathcal{A}(\ni 1)$をC^*環としたとき$\mathcal{A}$上の(有界線形)作用素全体$\mathcal{B}(\mathcal{A})$が十分扱い易い形のHermite元の構造を持

っていることを[[I]の[31]]で指摘した。 その説明の為に幾つか定義をする。 C^*環$\mathcal{A}(\ni 1)$に対して$\mathcal{A}\ni x$としたとき

$\lambda_x, \rho_x \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$(それぞれ[I]での$L_x$, R_x)を

$$\lambda_x(y) = xy, \quad \rho_x(y) = yx, \quad \delta_x = \lambda_x - \rho_x$$

と定める。 また、$\mathcal{A}$上の(有界)*微分$\delta\,(\in \mathcal{B}(\mathcal{A}))$とは

$$\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)\ (\forall x, y) \text{ かつ } \delta(x^*) = -\delta(x)^*\ (\forall x)$$

を満たすもののことである。 ここでSinclairの結果は

$$\mathcal{B}(\mathcal{A})^H = \{\lambda_x + \delta\ ;\ x \in \mathcal{A}^H,\ \delta : \mathcal{A}\text{ 上の * 微分}\}$$

という風に述べることが出来る。 [I]ではこの特徴づけを若干手直しして次のような結果を得た。 但し$\mathcal{A}^W$は$\mathcal{A}$がその中で稠密になっているようなW^*環の一つとする。

$$\mathcal{B}(\mathcal{A})^H = \{\lambda_x + \rho_y \in \mathcal{B}(\mathcal{A})\ ;\ x,\ y \in (\mathcal{A}^W)^H\}$$

$$\mathcal{B}(\mathcal{A})^+ = \{\lambda_x + \rho_y \in \mathcal{B}(\mathcal{A})\ ;\ x,\ y \in (\mathcal{A}^W)^+\}$$

$$\mathcal{B}(\mathcal{A})^N = \{\lambda_x + \rho_y \in \mathcal{B}(\mathcal{A})\ ;\ x,\ y \in (\mathcal{A}^W)^N\}$$

$$\mathcal{B}(\mathcal{A})^P = \{\lambda_x + \rho_y \in \mathcal{B}(\mathcal{A})\ ;\ x,\ y \in (\mathcal{A}^W)^P \text{ かつ } x \text{ と } y \text{ それぞれの central cover } e(x), e(y)\ ((\mathcal{A}^W)^P\text{内での})\text{に対して } e(x)e(y) = 0\}$$

$$\mathcal{B}(\mathcal{A})^J = \{\lambda_x + \rho_y \in \mathcal{B}(\mathcal{A})\ ;\ x,\ y \in \mathcal{A}^W (= (\mathcal{A}^W)^J)\}$$

特に、最後の特徴づけから直ちに$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})^J$(正確には$\mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))^J$であるが以下このような略記を用いる)が$\{\lambda_x + \rho_y\ ;\ x, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\}$と判り、こうして$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})$の可矩元は現在L.A. Fialkow等により

generalized derivationと呼ばれて盛んに研究されているものであると知れる。　しかし本稿では直接、彼らの問題意識には立ち入らない。

ともかく、以上の特徴づけにより$\mathcal{B}(\mathcal{A})^H$の構造研究にかなり代数的取り扱いが効くようになり、こうして[I]では主に次の三結果を得ることが出来た。

1. Murphy予想：$H, K, HK \in \mathcal{B}^H \Longrightarrow HK = KH$
   の$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{A})$での(成立の)検証。
2. $\mathcal{B}(\mathcal{A})$が$\mathcal{A} \neq \mathbb{C}$でIR環とはならないこと。
   つまり、$\mathcal{B}(\mathcal{H})$にnormも込めて(単位元が一致しなくてもよいとしても)部分環として埋め込めないこと。
3. W^*環$\mathfrak{M}$に対して、$\mathcal{B}(\mathfrak{M})^P$が$\mathfrak{M}^P$のorthomodular束と密接な関係を持つorthomodular束を成すこと。　この副産物としてorthomodular束の新構成法が発見できた。

これらの結果を得る際に最も有効に用いられた補助手段が「劈開補題」と名付けた次の命題である。

劈開補題. W^*環$\mathfrak{M}$に於いて$\lambda_s \delta_t = 0$であれば

$$\exists \text{central } e \in \mathfrak{M}^P : se = 0 \text{ かつ } (1-e)t \text{ が central}$$

これを利用して、証明したい命題をeで部分空間にsplitして行くのが[I]での主な手法だった。　この手法は結局の処cental部分をtrivial化して行こうというだけのことなのだが

存外強力で、問題のかなりのものが最終的に$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})^J$のcaseに帰着してしまうことになる。 反面、splitしても易しくならない種類の問題($\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})^J$固有の問題等)はこの手法ではうまく捌くことが出来ない。 こうして[I]の執筆時点で相当数の未解明課題が残らざるを得なかった。

以上を前置きとして、以下本論に入りたいが、もう二、三言述べさせて頂きたい。 残念なことに本稿は、研究集会の「作用素の不等式とその周辺」というテーマに余り適うものになっていない。 読者の方々の御寛恕を乞う次第である。

更には、このような少々異質なアマチュアの研究に発表の場を与えて下さった主催者の泉野佐一先生には、心よりの感謝を捧げさせて頂く者です。

当面の課題　本稿で取り扱う課題は主に次の三つである。

(A) $\mathcal{B}(\mathcal{A})^+ \ni A, B \quad A^2 = B^2 \overset{?}{\Longrightarrow}$ $A = B$ の証明

(B) $D^n = D$ なる($\mathcal{A}$上の有界)$*$微分の解明

(C) Olsen型定理の($\mathcal{B}(\mathcal{A})$での)確立

詳しくは順に解説して行くが、(A)と(B)は結局、大した問題ではないことが判った。 他方、(C)は難物で、劈開補題に代

わる新しい定理(「三可矩定理」と名付けるもの)を使ってようやく取り扱えるようになった。

(A)について…この問題は劈開補題が効かない問題の一例として[I]の最後に提出したものであるが、劈開補題を証明するのに似た方法で難なく証明されてしまうことが言えた。

〈(A)の証明〉 $A = \lambda_a + \rho_b$, $B = \lambda_c + \rho_d$, $a, b, c, d \in (\mathcal{A}^W)^+$ と表せる。 ここで任意の $u \in \mathcal{A}^W$: unitary(すなわち $u^* = u^{-1}$ なる u)に対し、

$$a^2u + 2aub + ub^2 = A^2u = B^2u = c^2u + 2cud + ud^2$$

であるから

$$(u^*au)^2 + 2(u^*au)b + b^2 = (u^*cu)^2 + 2(u^*cu)d + d^2$$

となる。 こうして、$(u^*au + b)^2 = (u^*cu + d)^2$ が判りここで $u^*au + b,\ u^*cu + d \in (\mathcal{A}^W)^+$ に注意すれば

$$u^*au + b = u^*cu + d$$

が出せる。 これは、$u^*(a-b)u = (d-b)$ ということなので、$a - c = d - b$ は cental となり、このとき確かに

$$A = \lambda_{a-(a-c)} + \rho_{b+(d-b)} = B$$ が成立すると判った。

これで(A)は肯定的に解決された訳だが、一般の Banach 環に対しても同様の結果が成立しているかどうか目下不明である。

♧(B)について…これは[I]には書きそびれてしまったものであるが、かなり本質的と思われた問題である。 きっかけは$\delta_p \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$が$p \in (\mathcal{A}^W)^P$であるとき$(\delta_p)^3 = \delta_p$を満たすこと(直接計算で判る)を知ったことにある。 この逆がどこまで成立するかということである。 結論は次のようになる。

定理1. $D^n = D\ (n > 1)$なる$\mathcal{A}$上の*微分は

(1) nが偶数なら0のみ

(2) nが奇数なら$D = \delta_p\ (p \in (\mathcal{A}^W)^P)$の形のものに限る

証明自体は割合簡単と言えるが結論の方は例えばLie環でのprojectionを考えるといったことに応用できるかもしれない。

(証明) (1) 1の$(n-1)$乗根を$\omega^j = \cos\frac{2\pi j}{n-1} + i\sin\frac{2\pi j}{n-1}$とするとき、スペクトル写像定理と$D^n = D$から

$\sigma(D) \subset \{0, \omega^1, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}\}$ が判る。

Dは*微分なので$D = \delta_a\ (a \in (\mathcal{A}^W)^H)$の形に書けるが、ここで、$\sigma(D) = \{\lambda - \mu\ ;\ \lambda, \mu \in \sigma(a)\}$に注意すれば、$\sigma(D) = -\sigma(D)$が成立していることになる。 ところがどの$-\omega^j$も$n-1$が奇数なので1の$(n-1)$乗根とはなっていない。 このことから$\sigma(D) = \{0\}$と判り、$D \in \mathcal{B}(\mathcal{A})^H$なので$D = 0$が言えた。

(2) $n = 2k+1$, $\omega^j = \cos\frac{\pi j}{k} + i\sin\frac{\pi j}{k}$ と置くとき1の$(n-1)$乗根は$\{\pm 1, \pm\omega^1, \pm\omega^2, \cdots, \pm\omega^{k-1}\}$となる

ことから、スペクトル写像定理と $D^n = D$ を用いて

$\sigma(D) \subset \{0, \pm 1, \pm\omega^1, \omega^2, \cdots, \pm\omega^{k-1}\}$ が判る。

ところが $D \in \mathcal{B}(\mathcal{A})^H$ から $\sigma(D) \subset \mathbb{R}$ となっているので

$\sigma(D) \subset \{0, \pm 1\}$ ということになる。 D を δ_a ($a \in (\mathcal{A}^W)^H$) の形に表し、$p = a - \min\sigma(a)$ と置いてやれば $D = \delta_p$ かつ $p \in (\mathcal{A}^W)^+$, $\sigma(p) \geq 0$ で更に $\sigma(p) \ni 0$ となる。 こうして、

$\{0, \pm 1\} \supset \sigma(D) = \{\lambda - \mu ; \lambda, \mu \in \sigma(p)\} \supset \{\lambda ; \lambda \in \sigma(p)\} \geq 0$

より、$\{0, 1\} \supset \sigma(D)$ すなわち p はprojectionとなる。

(C)について…C.L.Olsen型の定理というのは、本稿では

$(*)$ $\mathcal{A} \ni a, b \quad ab = 0 \implies p \in \mathcal{A}^P : ap = (1-p)b = 0$

の形の命題を意味している。 この $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ 版を確立しようという訳なのだが、勿論本質的なのは $\mathcal{B}\,\mathcal{B}(\mathcal{H})$ のcaseである。 なお、本来のOlsenの定理というのは $\mathfrak{H}$ を可分Hilbert空間として $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ で、0の代わりに $\mathfrak{H}$ 上のcompact作用素全体 $C(\mathfrak{H})$ となっているもの(cf. C.L.Olsen, Amer. J. Math., 93(1971).)であるが、この場合も命題を $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ からその $C(\mathfrak{H})$ による剰余 C^* 環、すなわちCalkin環 $\mathcal{B}(\mathfrak{H})/C(\mathfrak{H})$ に移して考えてみれば $(*)$ の形式となる。 但し注意したいのは $(*)$ は一般の C^* 環 $\mathcal{A}(\ni 1)$ でも成立しないことで、成立には $\mathcal{A}$ に十分豊富にprojectionがなけ

ればならないことになる。　この問題は$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})$のcaseでは一層深刻となり、$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})^P$が極端に(全体に比べて)小さい為、そのままでは直ちに反例が出てきてしまう。　この場合、自然な制限を付けなければならない。　一案としては(*)での$\mathcal{A}$を$\mathcal{A}^J$と見直して、それから$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})$に移すことである。　このようにすれば確かに$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})$でも、projection集合は可矩元に比べて極端には小さくもなっていないから、一応の可能性はある。

ところが、この場合にはこれでも成り立ってくれないのである。(反例は後述)　(*)はところで、$a, b \in \mathcal{A}^+$という条件を付しても一般性を失なわないことが、a, bをそれぞれ、$|a|$ $(=(a^*a)^{\frac{1}{2}})$, $|b^*|$ $(=(bb^*)^{\frac{1}{2}})$に置き換えてよいことから判る。$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})$では絶対値の概念が一般に($\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})^+$の元に対してさえ)存在しない訳であるから、このような条件は不当に強すぎて余り意味がなくなってしまうのではないかとの懸念が起きるかもしれない。　実際には後で示すように、この制限は(*)が$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})$版として成立し得る殆んどぎりぎりのものとなっている。　しかも、これ程の条件を付してなお、この命題の証明は劈開補題程度の道具では扱いきれず、どうしても新しく強力な手段が必要になってくる。　それが三可矩定理なのであるが、これについては長くなるので項を改めて詳述したい。

三可矩定理　このいささか奇妙な律(ひび)きの名称は、三空間問題(three space problem)といった音感から、仮に与えてみたものである。　それは次のような定理である。

三可矩定理. $A = \lambda_a + \rho_b$, $B = \lambda_c + \rho_d$ $(A, B \in \mathbb{BB}(\mathcal{H})^J)$ に対して、$AB \in \mathbb{BB}(\mathcal{H})^J \iff$

(1)　$a, b \in \mathbb{C}$　または　(2)　$c, d \in \mathbb{C}$　または

(3)　$a, c \in \mathbb{C}$　または　(4)　$b, d \in \mathbb{C}$　または

(5)　$^\exists \alpha,\ \beta,\ \mu \in \mathbb{C} : c = \alpha + \mu a,\ d = \beta - \mu b$

この証明には現在の処、次の補題を必要とする。

補題2. $a, b, c, d \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ のとき、$axb + cxd = 0\ (^\forall x)$

$\iff$ ①　「aかbが0」かつ「cかdが0」　または

②　$^\exists \eta \in \mathbb{C} : c = \eta a,\ d = -\eta^{-1} b$

この補題は初め、$a, b, c, d \in \mathbb{B}(\mathcal{H})^H$ というかなり強い条件を付けた上で、*abc-seminorm*(私的な術語で、$\nu(x) = \|axb\|$ $(a, b \geq 0)$ で定義される基本的な*seminorm*)に関する或る種の不等式を利用して繁雑な議論の末に示された。　そのすぐあとに綿谷安男氏により*semifinite trace*を使った全く一般的な形でのすっきりした証明が与えられた。　更に少しあとに、泉野佐一先生は綿谷氏と全く独立に、殆んど予備知識の要らない一層短い証明を見つけられた。　本稿ではその泉野先生に依る証明を紹介したい。

〈補題２の証明〉 $\Longrightarrow$ のみ考えれば済む。 まず φ, $\psi \in \mathcal{H}$ に対して $\varphi \otimes \psi \in B(\mathcal{H})$ を $(\varphi \otimes \psi)\xi = (\xi, \varphi)\psi$ で定める。 すると $axb = -cxd\ (\forall x)$ より

$$a(\varphi \otimes \psi)b\xi = -c(\varphi \otimes \psi)d\xi\ (\forall \varphi, \psi, \xi \in \mathcal{H})$$

であるから、

$$a(b\xi, \varphi)\psi = -c(d\xi, \varphi)\psi\ \ (\forall \varphi, \psi, \xi \in \mathcal{H})$$

となり、結局、$(b\xi, \varphi)a = -(d\xi, \varphi)c$ ……(#)

が判った。 ここで今、①のcaseを否定すれば、次の二caseが起き得ることになる。

(i) $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ のとき

(ii) $c \neq 0$ かつ $d \neq 0$ のとき

この(ii)は(i)と双対的に証明されてしまうので、以下(i)のみ考察する。 このときは $\exists \xi_0 : b\xi_0 \neq 0$ であるから、(#)により $0 \neq (b\xi_0, b\xi_0)a = -c(d\xi_0, b\xi_0)$ となる。 こうして $\eta = -(b\xi_0, b\xi_0)/(d\xi_0, b\xi_0)\ (\neq 0)$ と置けば $\eta \in \mathbb{C}$ かつ $c = \eta a$ となる。 更にこのとき $axb + cxd = 0\ (\forall x)$ から $(b + \eta d)^* x a^* = 0\ (\forall x)$ が言えるが、$a^* \neq 0$ であるから $(b + \eta d)^* = 0$ が判る。 すなわち $d = -\eta^{-1} b$ が出せて、結局②のcaseが成立していることになった。

さて、いよいよ三可矩定理の証明に進もう。

〈三可矩定理の証明〉 これも $\Longrightarrow$ のみ考えればよい。 まず

$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})^J \ni AB = \lambda_{ac} + \rho_{db} + \lambda_a\rho_d + \lambda_c\rho_b$ より

$\lambda_a\rho_d + \lambda_c\rho_b \in \mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})^J$ —— ①

が判る。すなわち $^\exists e, f \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$: $cxb + axd = ex + xf\ (^\forall x)$ であり、特に $cb + ad = e + f$ となるから

$c(bx - xb) + a(dx - xd) = \delta_f(x)$ が言える。この δ_f は微分、すなわち $\delta_f(xy) = \delta_f(x)y + x\delta_f(y)\ (^\forall x, y)$ を満たすからこれと合わせて、

$(xc - cx)(yb - by) + (xa - ax)(yd - dy) = 0\ (^\forall x, y)$ —— ②

を得る。ここで u, v を unitary として

$(c - u^*cu)(v^*bv - b) + (a - u^*au)(v^*dv - d) = 0$ となるから今、$a_u = a - u^*au$, $b_v = b - v^*bv$, $c_u = c - u^*cu$, $d_v = d - v^*dv$ と置けば、$a_u d_v + c_u b_v = 0$ —— ③ の式が出る。w を任意の unitary としたとき③からは

$a_{uw} d_v + c_{uw} b_v = 0$ —— ④ が判るが、ここで④−③を考えることにより、$a_u w d_v + c_u w b_v = 0$ が得られる。従って任意の $x \in B(\mathcal{H})$ に対して $a_u x d_v + c_u x b_v = 0$ が導けたことになる。こうして補題2により、

(1) 「a_u か d_v が 0」かつ「c_u か b_v が 0」 または

(2) $^\exists \eta_{u,v}$ (u, v に依存) $\in \mathbb{C}$: $c_u = \eta_{u,v} a_u$, $b_v = -\eta_{u,v}^{-1} d_v$

が成り立つ。

ここで場合分けを行なう。

(a) unitary $^{\exists}u_0$: $a_{u_0} \neq 0$ のとき

(b) unitary $^{\exists}v_0$: $d_{v_0} \neq 0$ のとき

(c) $a_u = d_v = 0$ $(^{\forall}u, v : \text{unitary})$ のとき

(A)…このときは、unitary v に対して

(i) $d_v = 0$ (すなわち $vd = dv$) または

(ii) $^{\exists}\eta_{u_0,v} \in \mathbb{C}$: $c_{u_0} = \eta_{u_0,v} a_{u_0}$, $b_v = -\eta_{u_0,v}^{-1} d_v$

である。 ここで $d \in \mathbb{C}$ であれば①より $(xc-cx)(yb-by)$ $= 0 \, (^{\forall}x, y)$ となるから、劈開補題で $b \in \mathbb{C}$ または $c \in \mathbb{C}$ ということが言える。 そこで $d \notin \mathbb{C}$ とすれば、どのような unitary v に対しても任意の $\varepsilon > 0$ より近い unitary v_ε が取れて $v_\varepsilon d \neq d v_\varepsilon$ となるが、そのときの v_ε に対しては (ii) の case : $^{\exists}\eta_{u_0,v_\varepsilon} \in \mathbb{C}$: $c_{u_0} = \eta_{u_0,v_\varepsilon} a_{u_0}$, $b_{v_\varepsilon} = -\eta_{u_0,v_\varepsilon}^{-1} d_{v_\varepsilon}$ が成立している筈である。 ここで $a_{u_0} \neq 0$ に注意すれば η_{u_0,v_ε} は実は v_ε に依存しない定数となっていると判る。 そこでこれを改めて $\mu (\neq 0)$ と書くことにすれば、

$b_{v_\varepsilon} = -\mu^{-1} d_{v_\varepsilon}$ であるから $\varepsilon \to 0$ により

$b_v = -\mu^{-1} d_v$ が得られる。 更にここで、μ が結局は v にも依存していないことが判るから、こうして

$(\mu b + d) = v^*(\mu b + d) v$ $(^{\forall}\text{unitary } v)$ となる。 これは $\mu b + d$ が central ということを意味するが、$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の central 元はすべて $\mathbb{C}$ に属すから、$\beta = \mu b + d \in \mathbb{C}$ と置けば $d =$

$\beta-\mu b$という形になる。 このことから次に①より

$\mathfrak{B}\mathfrak{B}(\mathcal{H})^J \ni \lambda_a P_b + \lambda_c P_b = \lambda_{(c-\mu a)} P_b + \lambda_{\beta a}$ が言えるので

$\mathfrak{B}\mathfrak{B}(\mathcal{H})^J \ni \lambda_{(c-\mu a)} P_b$ が判る。 この式が①での a, c, d をそれぞれ 0, $c-\mu a$, 0 に置き換えた形となっていることに注意しながら①から②への計算を辿れば、②にあたるものとして、

$$\{x(c-\mu a)-(c-\mu a)x\}(yb-by)=0 \quad (\forall x, y) \text{ —— ⑤}$$

が得られる。 ここで $d=\beta-\mu b \notin \mathbb{C}$ であったから、$b \notin \mathbb{C}$ である。 すなわち b は central ではないので、⑤に劈開補題を適用することにより、$c-\mu a$: central が導ける。 従って $\alpha=c-\mu a$ と置けば $\alpha \in \mathbb{C}$ かつ $c=\alpha+\mu a$ と書けることになる。

そこで結局、

「$b, d \in \mathbb{C}$」または「c, $d \in \mathbb{C}$」または

「$\exists \alpha, \beta, \mu \in \mathbb{C}\ (\mu \neq 0)$: $c=\alpha+\mu a$, $d=\beta-\mu b$」

と判った。

(B)…これは(A)に双対的に取り扱えて結論も双対的となる。すなわち、

「$a, b \in \mathbb{C}$」または「a, $c \in \mathbb{C}$」または

「$\exists \alpha, \beta, \mu \in \mathbb{C}\ (\mu \neq 0)$: $c=\alpha+\mu a$, $d=\beta-\mu b$」

が言える。

(C)…このときには、a, d : central すなわち $a, d \in \mathbb{C}$ ということになる。 ここで①から $\lambda_c \rho_b \in \mathbb{B}\mathbb{B}(\mathcal{H})^J$ と判るがこれは①での a, d を 0 に置き換えた形になっていることから同様の計算で②にあたる $(xc-cx)(yb-by)=0 \ (\forall x, y)$ を得る。 そこで劈開補題により $b \in \mathbb{C}$ または $c \in \mathbb{C}$ が言えて、結局、

「$a, b, c \in \mathbb{C}$」または「$a, c, d \in \mathbb{C}$」

を知る。

こうして(A), (B), (C)の各場合を合わせることにより、定理の結論が確証されたことになる。

以上の議論を検討することにより、その「$\mathbb{R}$ 版」、

系3. 三可矩定理でその a, b, c, d がすべて $\mathcal{A}^H$ に属しているときには定理中の $\mathbb{C}$ をすべて $\mathbb{R}$ に代えられること

も判る。

Olsen型定理 さて、Olsen型定理を扱う為に有効な次の定理を三可矩定理の系から導くことが出来る。

定理4. $A = \lambda_a + \rho_b$, $B = \lambda_c + \rho_d$ $(a, b \in B(\mathcal{H})^+, c, d \in B(\mathcal{H})^H)$ に対し次は同値

(a) $AB = 0$ (b) $BA = 0$

(c) (i)「A か B が 0」または

(ii)「$a, c \in \mathbb{R}$ かつ $(a+b)(c+d)=0$」 または

(iii)「$b, d \in \mathbb{R}$ かつ $(a+b)(c+d)=0$」

〈証明〉 (a) $\Leftrightarrow$ (b) は $\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})$ で Murphy 予想が成立することから明らか。 (c) $\Rightarrow$ (a) もすぐに判るから結局 (a) $\Rightarrow$ (c) のみ示せばよい。 このときは $AB=0$ より系3を用いて次の五 case のどれかが成立していると判る。

(1) $a, b \in \mathbb{R}$, (2) $c, d \in \mathbb{R}$, (3) $a, c \in \mathbb{R}$,

(4) $b, d \in \mathbb{R}$,

(5) ${}^{\exists}\alpha, \beta, \mu \in \mathbb{R}$: $c = \alpha + \mu a$, $d = \beta - \mu b$

(1) の case では $A \in \mathbb{R}$ となるので (i) に落ちる。

(2) の case では $B \in \mathbb{R}$ となるので (i) に落ちる。

(3) の case では $AB = \rho_{(c+d)(a+b)} = 0$ より (ii) に落ちる。

(4) の case では $AB = \lambda_{(a+b)(c+d)} = 0$ より (iii) に落ちる。

そこで問題は (5) の case だけとなる。 このときには

$$\{\mu a^2 + (\alpha+\beta)a\}x - x\{\mu b^2 + (\alpha+\beta)b\} = 0 \quad (\forall x)$$

となっているので $\mu a^2 + (\alpha+\beta)a = \{\mu b^2 + (\alpha+\beta)b\}$ は central となり $\mathbb{R}$ に属することになる。 これを δ と置くことにする。 ここでもし $\mu = 0$ であるなら

$c = \alpha + \mu a = \alpha \in \mathbb{R}$, $d = \beta - \mu b = \beta \in \mathbb{R}$ となって (2) に戻るから、$\mu \neq 0$ としてよい。 そうしたときスペクトル写像定理により、

$$\sigma(a) \subset \left\{ \frac{-(\alpha+\beta) \pm \sqrt{(\alpha+\beta)^2+4\mu\delta}}{2\mu} \right\},\ \sigma(b) \subset \left\{ \frac{(\alpha+\beta) \pm \sqrt{(\alpha+\beta)+4\mu\delta}}{2\mu} \right\}$$

が言える。 さて今、$\mu > 0$とする。 このとき更に

$\alpha + \beta \geqq 0$であるとすれば、$\sigma(a) \geqq 0$より

$$\sigma(a) = \left\{ \frac{-(\alpha+\beta) + \sqrt{(\alpha+\beta)^2+4\mu\delta}}{2\mu} \right\}$$ となって$a \in \mathbb{R}$が出る。

すると$c = \alpha + \mu a \in \mathbb{R}$も言えるから、結局(3)に戻ってしまう。 $\alpha + \beta < 0$であるときは、今度は$\sigma(b) \geqq 0$より

$$\sigma(b) = \left\{ \frac{(\alpha+\beta) + \sqrt{(\alpha+\beta)^2+4\mu\delta}}{2\mu} \right\}$$ となって$b \in \mathbb{R}$が出る。

そして$d = \beta - \mu b \in \mathbb{R}$も言えて、(4)に戻ることになる。

$\mu < 0$のときも以上と双対的な議論でやはり処理できる。

次に、予告して置いた、$A, B \in \mathcal{BB}(\mathcal{H})^J$だけの条件ではOlsen型定理が成立しないという実例を提示しよう。 実は少々驚いたことに、反例は既に$A, B \in \mathcal{BB}(\mathcal{H})^H$としてさえ存在するのである。

反例. $q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^P$, $q \neq 0, 1$ とし、

$$A = \lambda_q + \rho_{(q-1)},\quad B = \delta_q (= \lambda_q - \rho_q)$$ とする。

〈反例の検証〉 $A, B \in \mathcal{BB}(\mathcal{H})^H$, $AB = 0$ は直ちに判る。

次に、或る$P \in \mathcal{BB}(\mathcal{H})^P$に対して$AP = (1 - P)B = 0$となったとしよう。 ここで$P$が$\lambda_p$か$\rho_p$ ($p \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^P$) の形となっていることに注意する。 すなわちまず$P = \lambda_p$ (=

$\lambda_p + \rho_0)$のときを考えて定理4を用いると

(i)「PかAが0」または

(ii)「$p,\ q \in \mathbb{R}$かつ$(p+0)(q+q-1)=0$」または

(iii)「$0,\ q-1 \in \mathbb{R}$かつ$(p+0)(q+q-1)=0$」

が成立していることになる。　こうして結局$P=0$が出てくるが、そうすると$(1-P)B=B \neq 0$となり矛盾する。　$P=\rho_p$のときも双対的に行なえる。

それでは$\mathbb{B}\mathbb{B}(\mathcal{H})$でのOlsen型定理はどの程度の制限で成立するのかということになるが、それについて次の定理が示せる。

定理5.　$\mathbb{B}\mathbb{B}(\mathcal{H})^H \ni A, B$　$AB=0$で、かつAかBの片方がpositiveならば

$$\exists P \in \mathbb{B}\mathbb{B}(\mathcal{H})^P : AP=(1-P)B=0 \quad \text{となる}$$

〈証明〉定理4より、Aの方をpositiveと仮定して一般性を失なわない。　そこで、$A=\lambda_a+\rho_b$, $B=\lambda_c+\rho_d$ $(a, b \in \mathbb{B}(\mathcal{H})^+,\ c, d \in \mathbb{B}(\mathcal{H})^H)$と置く。　$AB=0$と定理4から

(i)「AかBが0」または

(ii)「$a,\ c \in \mathbb{R}$かつ$(a+b)(c+d)=0$」または

(iii)「$b,\ d \in \mathbb{R}$かつ$(a+b)(c+d)=0$」

となる。　(i)であればそれぞれPを1または0とすれば済む。　(ii)の場合には$(a+b)(c+d)=0$に$(*)$($\mathcal{A}=\mathbb{B}(\mathcal{H})$のと

き)を適用して $^\exists p\in \mathcal{B}(\mathcal{H})^P$: $(a+b)p=(1-p)(c+d)=0$ となるから、ここで $P=\lambda_p\in \mathcal{BB}(\mathcal{H})^P$ を考えれば確かに $AP=(1-P)B=0$ が得られる。 (iii)は(ii)と双対的に考えれば出来る。

このように $\mathcal{BB}(\mathcal{H})$ での Olsen型定理の確立は大変微妙なものであると判った。 一般の $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ の場合には、$\mathcal{A}$ で既に(*)が成立するとは限らないので確立は一層困難なものになる。 しかし特に W^*環 $\mathfrak{M}$ のときには(*)が言え、$\mathcal{B}(\mathfrak{M})$ での話を Zsido の手法([I]参照)により(*)に落とすことで $\mathcal{BB}(\mathcal{H})$ と類似の結果を得ることが出来る。(詳細は略す。)

以上で課題(C)についての考察を終えるが、そこで提示した三可矩定理は、当然のことながら、Olsen型定理の証明にしか役立たないものではない。 実際これは興味深い $\mathcal{BB}(\mathcal{H})^J$ の性質の考究にかなりの力を有している。 そこで次にそういった三可矩定理の応用を見てみよう。

三可矩定理の副産物　最初に取りあげる結果の証明はそれ程難しくないが、$\mathcal{BB}(\mathcal{H})^J$ に対してかなり本質的なものという気がする。

定理6. $A, B\in\mathcal{BB}(\mathcal{H})^J$ であるとき

$$AB \in \mathcal{BB}(\mathcal{H})^J \iff BA \in \mathcal{BB}(\mathcal{H})^J$$

〈証明〉 $\Longrightarrow$ のみ考えればよい。 三可矩定理より、$AB \in \mathcal{BB}(\mathcal{H})^J$ から (1) $a, b \in \mathbb{C}$ または (2) $c, d \in \mathbb{C}$ または (3) $a, c \in \mathbb{C}$ または (4) $b, d \in \mathbb{C}$ または (5) $\exists \alpha, \beta, \mu \in \mathbb{C} : c = \alpha + \mu a,\ d = \beta - \mu b$ と判る。 但し $A = \lambda_a + \rho_b$, $B = \lambda_c + \rho_d$ として置く。 これら各場合に対して $BA \in \mathcal{BB}(\mathcal{H})^J$ をそれぞれ確かめてみれば済む。

また、$\mathcal{BB}(\mathcal{H})$ では Murphy 予想より強い次の命題も成り立つことが判る。 ここで $A \in \mathcal{BB}(\mathcal{H})^J$ に対して $A = H + iK$ をデカルト分解としたとき $A^* = H - iK$ と定義して置く。

定理7. $A, B, AB \in \mathcal{BB}(\mathcal{H})^J$ ならば $(AB)^* = B^* A^*$

〈証明〉 定理6と同様に、三可矩定理で五caseに分け、それぞれの場合に $(AB)^* = B^* A^*$ を確かめて行けば済む。

$\mathcal{BB}(\mathcal{H})^H$ を取り扱うのには むしろ系3(三可矩定理の「R版」)が重要になってくる。

定理8. $\{AB \ ;\ A, B \in \mathcal{BB}(\mathcal{H})^H\} \cap \mathcal{BB}(\mathcal{H})^J$

$$\subset \{\lambda_x, \rho_x \ ;\ x \in \mathcal{BB}(\mathcal{H})\} \cup \mathcal{BB}(\mathcal{H})^H$$

証明は簡単なのだが、目下の処これが何を示唆しているのか判らない。

〈定理8の証明〉 $\{AB ; A, B \in \mathcal{BB}(\mathcal{H})^H\} \cap \mathcal{BB}(\mathcal{H})^J \ni AB$ を取る。

但し $A = \lambda_a + \rho_b$, $B = \lambda_c + \rho_d$ $(a, b, c, d \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^H)$ とする。

すると系3から、(1) $a, b \in \mathbb{R}$ または (2) $c, d \in \mathbb{R}$ または (3) $a, c \in \mathbb{R}$ または (4) $b, d \in \mathbb{R}$ または (5) $\exists \alpha, \beta, \mu \in \mathbb{R} : c = \alpha + \mu a$, $d = \beta - \mu b$ と言える。ここで(1)−(4)のcaseでは $AB \in \{\lambda_x, \rho_x ; x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\}$ となっている。(5)のcaseからは $AB \in \mathbb{BB}(\mathcal{H})^H$ が得られる。

付け加えると(5)の場合には $AB = BA$ となっている。

定理9. $A \in \mathbb{BB}(\mathcal{H})^+$, $B \in \mathbb{BB}(\mathcal{H})^H$, $AB \in \mathbb{BB}(\mathcal{H})^N$

$$\Longrightarrow AB \in \mathbb{BB}(\mathcal{H})^H$$

定理10. $A, B \in \mathbb{BB}(\mathcal{H})^+$, $AB \in \mathbb{BB}(\mathcal{H})^N \Longrightarrow AB \in \mathbb{BB}(\mathcal{H})^+$

これら両定理は、もし「$A \in \mathbb{BB}(\mathcal{H})^+$, $B \in \mathbb{BB}(\mathcal{H})^H \Longrightarrow \sigma(AB) \subset \mathbb{R}$」が直接に示せるのであれば自明な結果となるのであるが、現時点ではそれは難しい。C^*環での常套手段 $\sigma(AB) \cup \{0\} = \sigma(A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}}) \cup \{0\}$ の翻案は、この場合そもそも一般に $A^{\frac{1}{2}}$ の存在が保証されないので第一歩目から壁にぶつかってしまう。従って目下の処、逐一三可矩定理で確認して行くしかない。

くどいようだが念の為、定理10の証明の方を述べてみる。

〈定理10の証明〉 $A = \lambda_a + \rho_b$, $B = \lambda_c + \rho_d$ ($a, b, c, d \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$) と置いてから系3を用いて定理8のように五caseに分ける。このうちで本質的なのが、(5) $\exists \alpha, \beta, \mu \in \mathbb{R} : c = \alpha + \mu a$, $d = \beta - \mu b$ のcaseである。この場合に

$$AB = \lambda_{\{\mu a^2 + (\alpha+\beta) a\}} + \rho_{\{-\mu b^2 + (\alpha+\beta) b\}}$$ となっているこ

とに注意する。ここで$\mu=0$であれば証明はすぐ終わる。そこで$\mu>0$とする。すると$\beta=b+\mu d\geq 0$が言える。但し「$\geq$」は$\mathcal{B}(\mathcal{H})^{+}$から導入した半順序関係である。更に場合分けとして$\alpha\geqq 0$とする。このときは、$\alpha+\mu a=c\geq 0$かつ$\beta-\mu b=d\geq 0$を援用して

$$\mu a^2+(\alpha+\beta)a=(\alpha+\mu a)+\beta a\geq\beta a\geq 0$$ 及び

$$-\mu b^2+(\alpha+\beta)b=(\beta-\mu b)+\alpha b\geq\alpha b\geq 0$$ が導けるから

$AB\in\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})^{+}$が判る。$\alpha<0$であれば今度は

$$AB=\lambda_{\{\mu a^2+(\alpha+\beta)a+\mu^{-1}\alpha\beta\}}+\rho_{\{-\mu b^2+(\alpha+\beta)b-\mu^{-1}\alpha\beta\}}$$ である

ことに注意して

$$\mu^2a^2+\mu(\alpha+\beta)a+\alpha\beta=(\mu a+\alpha)(\mu a+\beta)\geq 0$$ 及び

$$-\mu^2b^2+\mu(\alpha+\beta)b+\alpha\beta=(\beta-\mu b)(\mu b-\alpha)\geq 0$$ を考察

すれば済む。残った$\mu<0$のcaseでは$\mu>0$のときと双対的な議論が辿れる。⊛

最後に$\mathcal{B}(\mathcal{A})$のpositive元Aの平方根$A^{\frac{1}{2}}(\in\mathcal{B}(\mathcal{A})^{+})$の存在に関する一結果を証明抜きで挙げて置く。

定理11. $A\in\mathcal{B}(\mathcal{A})^{+}$を可逆($\mathcal{B}(\mathcal{A})$内で逆元を持つ)としたとき、

$$\exists A^{\frac{1}{2}}\iff A^{-1}\in\mathcal{B}(\mathcal{A})^{+}$$

⊛以上が現在までの$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})$に関係した私的研究の概略であるが、当面の課題は数多く、かなりの問題点が未処理のままに

されている。以下にそれらの主なものについて取り上げ、本稿を結びたいと思う。

当面の課題　[I]で提出された問題の大半は依然未解決のままである。更に本稿の問題の取り扱いにも多くの不備が指摘できる。例えばやはり、本稿でのOlsen型定理の定式化は如何にも矮小化された印象が濃い。せめて、「$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{A})^{+} \ni A, B$ かつ $AB \in \mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})^{J}$: compact $\Longrightarrow {}^{\exists}P \in \mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})^{P}$: $AP, (1-P)$ はcompact」位の定式化が望まれるが、これはまだ得られていない。それは三可矩定理の問題ではなく現在compact元の構造がよく判らないせいである。従って当面、Calkin環に相当する$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathfrak{H})/\mathcal{C}\mathcal{B}(\mathfrak{H})$でのHermite元の戻像(lifting)問題といったことも手が付かない。ともかく、三可矩定理によって$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})^{J}$の代数的にきれいな部分だけはほぼ片付いてしまったので今後こういった問題も一つの目標になってくるだろう。それから$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})^{J}$で生成されたBanach部分環の考察なども手を付けなければならない課題と思われる。他には、$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})$の元の$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})^{J}$などによる近似問題もある。$T \in \mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})^{J}$の沌数(entropy number) $e_n(T)$の計算も考えてみたいテーマである。

本稿に対する他の批判としては、$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})$ばかりに囚われて

$\mathcal{B}(\mathcal{A})$固有の問題意識の存在をなおざりにしているということが有る。 例えば「$\mathcal{B}(\mathcal{A})^+$のcontraction(normが1以下)全体$\mathcal{B}(\mathcal{A})^+_1$の端点集合は$\mathcal{B}(\mathcal{A})^P$か?」という問題は$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})$では容易に解決できるが一般には不明のままである。 このように$\mathcal{B}(\mathcal{A})$の中では確かに$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})$は典型的な実例ではあっても$\mathcal{B}(\mathcal{A})$の問題をすべて$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})$で代表させようとするのには無理が有ると言える。 そしてここには別の新しい手法を開発できる余地も有りそうである。

定理7，9，10，11等についてはこれが果たして$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})$固有の結果なのかどうかの詰めがそのままにされている。 もしもそれらが一般的なBanach環論の枠組みの中で証明されるのであれば面白い(しかし$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})$の話としては無意味となる)が現在成功していない。 もともと$\mathcal{B}(\mathcal{A})$の研究の動機の一つが$\mathcal{B}^J$の一般的な考察の際の実験モデルにしたいということであったことから考えると、むしろ本来の目的に適うものになっているかもしれない。

現在までに得られた$\mathcal{B}(\mathcal{A})$(特に$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})$)の結果を足がかりにして他の対象に手を伸ばすことも一法である。 $(\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathfrak{X})/\mathcal{C}\mathcal{B}(\mathfrak{X}))^J$の考察が出来るなら非常に面白いと思うのであるが、他にも$\mathcal{B}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{B}(\mathcal{H}))$とか$\mathcal{B}(\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})^J)$といった対象が有る。 更に$\mathcal{A}$上のLyaponov作用素$L_x$といった非線形作用素の性質も当面の

射程距離にあるように感じられる。

$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})$は$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})^J$に比べて遙かに巨大な集合なので$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})^J$の考究から$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})$全体の性質を解明して行くことには自ずから限界が有るようにも思える。　そうであれば$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})^J$の非力を補えるような($\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})^J$と調和する)十分扱い易い新しい集合を開発しなければならないが現在それには成功していない。

$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})$自体の構造の難解さは、例えば「$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathfrak{h})$の可逆元全体$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathfrak{h})^{-1}$は連結か?」といったような単純な問題さえ解く術(すべ)が見出せない程である。　一般に$\mathcal{B}(X)^{-1}$(X: Banach空間)は連結とは限らない(cf. A. Douady, Indag. Math., 27(1965), 787-789. 教示は綿谷安男氏に依る。)から一応どちらの可能性も有る。しかもこの問題が$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})^J$から解明できるとは信じ難い。　もし連結でなければ$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathfrak{h})$の元に一種の指数(index)が定義できることになるから無意味な問題とも思われない。　この問題を極度に矮小化して「$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathfrak{h})^{-1} \cap \mathcal{B}\mathcal{B}(\mathfrak{h})^J$は連結か?」と問い直せば(勿論、もとの問題と論理的関連は切れてしまうが)多少は解明の見込みも出てくるし、$\mathcal{B}\mathcal{B}(\mathcal{H})^J \ni \lambda_x + \rho_y$に対する「指数」的な不変量導入の可能性も僅かに残っているからむしろ面白い課題になるかもしれない。

最後に、この様にアマチュア然とした不備の多い研究に対し興味をお持ち頂いたことに感謝しながら本稿を終えたい。